ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VII.

1° SEMESTRE

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

④ RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Adunanza generale delle due Classi

del 20 febbraio 1898.

E. Beltrami Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica — *Segmenti e numeri transfiniti* (1). Nota del Corrispondente G. Veronese.

In seguito ad alcune mie affermazioni relative ad una critica obbiettiva del prof. Schoenflies (2), delle quali non avevo dato alcuna prova, egli ha ripetuto in questi Rendiconti con maggiori particolari le sue osservazioni sui miei numeri transfiniti (3). Mi propongo quindi in questa Nota di dar ragione delle mie affermazioni, e giacchè tratto di questo argomento, dirò anche alla fine qualche cosa intorno al cenno dei miei *Fondamenti di Geometria* (4) fatto di recente dal prof. Klein.

1. La questione del segmento infinitesimo attuale è antica; ma nè i sostenitori nè gli oppositori di tale idea ne hanno mai provata la possibilità o la impossibilità geometrica, perchè essi non hanno posta la questione in modo chiaro e determinato, complicandola anzi talvolta con considerazioni filosofiche ad essa estranee (5).

(1) Col vocabolo transfinito intendo così l'infinito come l'infinitesimo attuale.

(2) *S. Transfinite Zahlen, das Axiom des Archimedes und die projective Geometrie.* Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung, 1897. — A. *Sul postulato della continuità,* fasc. 19 sett. 1897 di questi Rendiconti.

(3) *Sur les nombres transfinis de Mr. Veronese,* fasc. 19 dec. 1897.

(4) Padova, 1891. *Traduzione tedesca di A. Schepp.* Leipzig, 1894. Indicherò i *Fondamenti* nel corso di questa Nota con le lettere *F. G.*

(5) Fra i matematici che si occuparono di tale questione o espressero il loro avviso su di essa trovansi dei nomi illustri, come J. Bernoulli, Leibnitz, Gauss ecc. *F. G.*, pag. 619-625 — tr. t. pag. 697-707.

Essa invece va posta in modo analogo a quelle relative ai postulati delle parallele e delle dimensioni dello spazio; vale a dire dati tutti i postulati necessarî per costruire la figura corrispondente al campo della nostra osservazione esterna e considerati come possibili tutti quei postulati che non contraddicono ai precedenti e non si contraddicono fra loro ([1]), il postulato d'Archimede è esso conseguenza degli altri? O in altre parole è egli possibile una geometria nella quale due segmenti A e B ($A < B$) non obbediscano in generale alla relazione $An > B$, essendo n un numero intero qualunque della serie $1, 2, 3 \ldots n \ldots$?

Se si dà il postulato della continuità nella forma proposta da Dedekind, o facendo corrispondere biunivocamente i punti della retta ai numeri reali *ordinarî*, allora detta relazione si può considerare come un'immediata conseguenza di esso ([2]). Ma io diedi alla proposizione della continuità un'altra forma che pur mantenendo i caratteri del continuo rettilineo non racchiude quella di Archimede. Anzi nella Nota sopra citata ho rilevato che mediante opportune definizioni si può dimostrare questa proposizione della continuità, cosicchè il postulato d'Archimede è un postulato di limitazione del campo della ricerca geometrica, come lo è quello delle tre dimensioni dello spazio.

Prima della pubblicazione dei miei *F. G.*, i sigg. G. Cantor e W. Killing avevano tentato di dimostrare il postulato d'Archimede. Essi non hanno però confutato le osservazioni da me fatte alle loro dimostrazioni ([3]), ma hanno invece criticata la parte degli infiniti e infinitesimi attuali svolta nella introduzione dei *F. G.*; il primo ritenendola impossibile, il secondo manifestando dei dubbî contro di essa. A queste critiche ho risposto punto per punto, tranne a qualche osservazione del sig. Killing, la quale non aveva un senso chiaro e determinato ([4]). Ma egli stesso poi chiarì meglio il suo concetto di *Zusammenhang* che credeva necessario alla costituzione del continuo rettilineo ([5]). Avrei risposto anche a questa obiezione, che pel sig. Killing era fondamentale, se il sig. Schoenflies stesso non me ne avesse in qualche modo dispensato, osservando che tale concetto non è geometricamente necessario ([6]). Ma a sua volta il sig. Schoenflies, che aveva già pubblicata una relazione cortese ed accurata dei *F. G.* ([7]), la quale dimostra il vivo interesse da lui preso pel mio libro, osservava poi nella sua prima Nota sopra citata:

(1) *F. G.*, pref. pag. XI-XII, opp. *Osservazioni sui principî della geometria*, pag. 4. Atti della R. Acc. di Padova, giugno 1894, o ancora *Sul postulato della continuità*, pag. 162.

(2) *F. G.*, l. c.

(3) *F. G.*, pag. 132 e 165. tr. t. pag. 701 e 705.

(4) *Intorno ad alcune osservazioni contro i segmenti infiniti e infinitesimi attuali*. Math. Annalen, Bd. 47.

(5) Math. Annalen, Bd. 48, pag. 425 e seg.

(6) Transfinite Zahlen ecc.

(7) Göttinger Gelehrte Anzeigen, Nr. 12, 1895. In questa relazione, nella quale Schoenflies riferisce e interpreta generalmente con esattezza i concetti dei *F. G.* e particolarmente del continuo rettilineo, egli non si occupa della teoria degli infiniti e infinitesimi.

1° che non è sempre possibile la moltiplicazione coi miei numeri transfiniti;

2° che la moltiplicazione ha luogo invece con quelli studiati dal prof. Levi-Civita perchè, egli dice, mentre questi si estendono indefinitamente in generale da un lato soltanto, i miei si estendono indefinitamente da due lati;

3° che quindi non è possibile una geometria proiettiva nel campo dei numeri transfiniti.

Nella mia Nota *Sul postulato della continuità* ho invece affermato che i numeri da lui scelti non appartengono al mio sistema, che non sussiste la differenza notata fra i miei numeri e quelli del prof. Levi-Civita, e finalmente che è possibile una geometria proiettiva nel campo dei numeri transfiniti. Il sig. Schoenflies, come ho detto, torna nell' ultima sua Nota con maggiori particolari per dimostrare l' esattezza delle sue asserzioni. Egli dice dapprincipio:

« D' abord je pourrai citer Mr. Veronese contre lui même; dans une « note des *Fondamenti* on trouve les mots suivants » (1): « I nostri numeri « infiniti e infinitesimi sono in fondo numeri complessi speciali con infinite « unità; tali però che il prodotto di due di esse non si esprime linearmente « mediante le altre, e per ciò per questi numeri vale il teorema che se il « prodotto di due di essi è nullo, deve esser tale anche uno dei fattori, come « vale pei numeri complessi ordinarî e pei quaternioni di Hamilton ».

E dopo aver riportato il simbolo dei numeri positivi interi (2) e del numero generale compreso fra 0 e 1, cioè:

$$Z = (AA_1)\Bigg[\left(\frac{\alpha_1^{(0)}}{2} + \frac{\alpha_2^{(0)}}{2^2} + \cdots + \frac{\alpha_n^{(1)}}{2^n}\right) \pm \frac{m_1}{\infty_1}\left(\frac{\alpha_1^{(1)}}{2} + \cdots + \frac{\alpha_{n_1}^{(1)}}{2^{n_1}}\right) + \cdots$$

$$\cdots \pm \frac{m_r}{\infty_1^r}\left(\frac{\alpha_1^{(r)}}{2} + \cdots + \frac{\alpha_{n_r}^{(r)}}{2^{n_r}}\right) \pm \cdots \pm \frac{m_{\infty_1 - r'}}{\infty_1^{\infty_1 - r'}}\left(\frac{\alpha_1^{(\infty_1 - r')}}{2} + \cdots + \frac{\alpha_{n\infty_1 - r'}^{(\infty_1 - r')}}{2^{n\infty_1 - r'}}\right) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{m_\mu}{\infty_1^\mu}\left(\frac{\alpha_1^{(\mu)}}{2} + \cdots + \frac{\alpha_{n_\mu}^{(\mu)}}{2^{n_\mu}}\right)\Bigg]$$

(1) Pref. pag. XXVI (tr. t. pag. XXV).

(2) Il simbolo di un numero intero positivo è:

$$Z = \infty_1^\mu n_1 \pm \infty_1^{\mu-1} n_2 \pm \cdots \pm \infty_1^n n_{\mu-n+1} \pm \cdots \pm n_{\mu+1}$$

ove le n sono numeri finiti e interi ordinarî che possono esser tutte o in parte zero e sono in numero finito, come risulta dalla costruzione stessa dei segmenti da cui derivano, e come è detto espressamente a pag. 123 dei *F. G.* (tr. t. pag. 138). Il numero μ è uno dei numeri già ottenuti dal simbolo Z, ma in $n_{\mu+1}$ non indica che il numero dei coefficenti n sia infinito.

egli dà un esempio di due numeri coi quali non si può eseguire la moltiplicazione, cioè:

$$A = a_0 \infty_1^{\infty_1} + \cdots + a_r \infty_1^{\infty_1 - r} + \cdots + a'_{r'} \infty_1^{r'} + \cdots + a'_0 + \frac{a''_1}{\infty_1} + \cdots + \frac{a''_r}{\infty_1^r} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{a'''_{r'}}{\infty_1^{\infty_1 - r'}} + \cdots + \frac{a'''_0}{\infty_1^{\infty_1}}$$

$$B = b_0 \infty_1^{\infty_1} + \cdots + b_r^{\infty_1 - s} + \cdots + b'_{s'} \infty_1^{s'} + \cdots + b'_0 + \frac{b''_1}{\infty_1} + \cdots + \frac{b''_s}{\infty_1^s} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{b'''_{s'}}{\infty_1^{\infty_1 - s'}} + \cdots + \frac{b'''_0}{\infty_1^{\infty_1}}$$

Nella Nota pubblicata nell' *Jahesbricht der Deutschen Math. Vereinigung* il sig. Schoenflies aveva dato questi due numeri:

$$A' = \cdots a_n \infty^n + \cdots + a_1 \infty + a_0 + \frac{a'}{\infty} + \cdots + \frac{a^{(\nu)}}{\infty^{(\nu)}} + \cdots$$
$$B' = \cdots b_n \infty^m + \cdots + b_1 \infty + b_0 + \frac{b'}{\infty} + \cdots + \frac{b^{(\mu)}}{\infty^{(\mu)}} + \cdots \qquad [1]$$

Dicendo che i numeri A e B o A′ e B′ si estendono indefinitamente dai due lati, egli ritiene che in A e B possano crescere indefinitamente r e r', s e s'. In tal caso è chiaro che ad es. il coefficente c_0 del termine del prodotto A . B, che moltiplica l'unità fondamentale 1, è la somma di un numero infinito di prodotti della forma $a_i \cdot b_k$, potendo essere a_i e b_k numeri reali ordinarî positivi, e quindi i coefficenti di A . B non si possono ottenere colle regole ordinarie, le quali, come Schoenflies avverte, si possono applicare invece quando i numeri transfiniti contengono un numero finito di termini, oppure si estendono indefinitamente da un solo lato.

Questa è l'obiezione principale del sig. Schoenflies, della quale le altre sono conseguenze.

2. Da quanto ho affermato a tal proposito nella mia Nota *Sul postulato della continuità* risulta che i miei numeri non possono estendersi indefinitamente dai due lati ma da un lato solo. Prima però di provare questa mia affermazione debbo premettere una considerazione che sembra sfuggita al sig. Schoenflies e può sfuggire anche a chi nell'esame di questa parte dell'introduzione dei *F. G.* prenda di mira soltanto i numeri coi quali ho rappresentati i segmenti finiti, infiniti e infinitesimi attuali. Il sig. Schoenflies rileva che ho dato un *solo* esempio numerico, e che non sempre nel libro

[1] Veramente qui non va ∞ (che è evidentemente un errore di stampa) perchè ∞ è il simbolo anche da me usato per indicare l'infinito potenziale, ma va ∞_1 che indica un infinito attuale.

si trovano indicate le regole sufficienti per il calcolo. Io non ho alcuna difficoltà di ammettere ciò, anzi credo che questo sia un pregio del mio metodo. Nell' introduzione ho adottato, per la natura stessa delle cose trattate, il metodo basato sul puro ragionamento, ed ho stabilito così le proprietà della forma fondamentale che nella geometria corrisponde alla retta. Ho costruito i segmenti e li ho rappresentati per fissare le idee con dei simboli (numeri), ai quali ho esteso le proprietà dei segmenti e viceversa. Dalle mie costruzioni ho dedotto la esistenza del segmento rappresentante il prodotto e il quoziente di un segmento per un numero dato, e quindi anche di due numeri (1). Da ciò deducesi che valgono per le operazioni fondamentali con questi numeri le leggi ordinarie. Considerando dunque i numeri come simboli scelti per indicare i nuovi segmenti che mano mano venivo costruendo, a me non interessava punto di dar sempre le regole algoritmiche che servono al calcolo coi miei numeri indipendentemente dalle considerazioni sintetiche. È però ovvio che dalle costruzioni eseguite sulla forma fondamentale per ottenere ad es. il prodotto o il quoziente di un segmento per un numero, si possono ricavare facilmente le regole della determinazione simbolica dei termini del prodotto e del quoziente di due numeri qualunque essi siano.

E a maggior ragione non mi sono occupato di trovare un algoritmo più semplice, dal punto di vista analitico, per rappresentare i miei numeri, perchè tale ricerca sarebbe stata estranea allo scopo dei *F. G.* Ma a tale proposito ho citato nelle mie precedenti Note la Memoria del prof. Levi-Civita sugli infiniti e infinitesimi attuali quali elementi analitici (2), nella quale egli costruisce con considerazioni puramente numeriche un sistema di numeri che corrispondono ai miei numeri finiti, infiniti e infinitesimi *d'ordine finito*. Questi si ottengono dai primi quando agli indici ν dei monosemi a_ν (dove a e ν sono numeri reali ordinarî) e che corrispondono ai miei numeri $a\,\infty_1^\nu$, si danno valori interi. Del resto le proprietà caratteristiche dei numeri rimangono le stesse anche dando a quegli indici dei valori non interi. Ed è facile vedere, anche seguendo le considerazioni puramente analitiche del prof. Levi-Civita, che i miei numeri finiti, infiniti e infinitesimi d'ordine finito formano un corpo, nel senso che si trasforma in se medesimo mediante le operazioni fondamentali dell'aritmetica regolate dalle leggi ordinarie (3).

Ora, la obiezione del sig. Schoenflies, sebbene egli non lo abbia detto, non si riferisce ai miei numeri finiti, infiniti e infinitesimi d'ordine finito, espressi colle unità $1,\ \infty_1,\ \infty_1^2 \ldots\ \infty_1^n \ldots,\ \frac{1}{\infty_1},\ \frac{1}{\infty_1^2} \cdots \frac{1}{\infty_1^n}$, ma bensì ai numeri infiniti e infinitesimi d'ordine infinito.

(1) *F. G.*, pag. 154-159, tr. t. pag. 170-176.
(2) Atti del R. Istituto veneto, 1894.
(3) *F. G.*, pag. 124 e 201 tr. t. pag. 139 e 217.

Nella parte geometrica dei *F. G.* ho dichiarato che mi limito soltanto al campo dei segmenti transfiniti di ordine finito [1]; la questione dunque di una geometria nella quale due segmenti rettilinei A e B ($A < B$) non obbediscono in generale al postulato d'Archimede, ma bensì alla relazione $A\,\eta > B$ dove η è un numero transfinito, non è intaccata menomemente dalle obiezioni del sig. Schoenflies [2].

3. Ma almeno le obiezioni del sig. Schoenflies rispetto ai miei numeri transfiniti d'ordine infinito sono esse esatte? Per quanto tale questione, dopo ciò che ho detto, diventi secondaria per la geometria, *debbo rispondere negativamente*.

Intanto dalla nota della prefazione dei *F. G.* da lui citata e sopra riportata, non risulta che io sia in contraddizione con me stesso, non risulta cioè che la moltiplicazione dei miei numeri non possa aver luogo. Anche i numeri studiati dal sig. Levi-Civita, e pei quali il sig. Schoenflies riconosce possibile la moltiplicazione, sono numeri complessi a infinite unità 1_ν (dove ν è un numero reale qualunque ordinario) pei quali vale appunto l'osservazione contenuta nella nota anzidetta. Quella mia osservazione non autorizza dunque a trarre la conclusione che il numero $C = A \,.\, B$ non è confrontabile cogli altri numeri del sistema, come egli asserisce alla fine della sua ultima Nota, perchè tale asserzione si basa sulla obiezione relativa alla moltiplicazione. Ora, questa obiezione deriva da un malinteso, vale a dire il sig. Schoenflies ritiene erroneamente che i miei numeri si possano estendere indefinitamente dai due lati anzichè da uno solo, nel senso ad es. che r' nel numero A possa crescere indefinitamente, come può crescere indefinitamente r. Per persuadersene basta osservare che i miei segmenti, e quindi anche i numeri che li rappresentano, sono ottenuti o come somme di un numero finito di segmenti finiti, o coll'applicazione ad un segmento dato di un numero finito di volte del principio dell' ip. IV e dell' ip. V, o mediante la somma di un numero finito di segmenti così ottenuti, coll'applicazione dell' ip. VII e finalmente come somma di un numero finito di segmenti limiti di serie di segmenti indefinitamente decrescenti sia in senso relativo che in senso assoluto. La serie ad es.:

$$(1) \qquad a_0 \infty_1 + a_1 \infty_1^2 + \cdots + a_n \infty_1^n + \cdots \quad \text{per } n = \infty$$

non rappresenta un segmento (AB), ma un campo illimitato di segmenti, e quindi neppure uno dei miei numeri. Il numero A deve sempre cominciare da un primo numero di unità data, ad es. ∞_1^n, mentre il simbolo A′ del sig. Schoenflies lascia credere che n possa crescere indefinitamente. Così il numero A non può contenere la serie:

$$\frac{a}{\infty_1{}^{\infty_1 - r'}} + \frac{a'}{\infty_1{}^{\infty_1 - (r'-1)}} + \cdots$$

(1) *F. G.*, pag. 245, tr. t. pag. 266.

(2) Osservo a questo proposito che per la intelligenza della sola parte geometrica dei *F. G.* il lettore può limitarsi facilmente ai transfiniti d'ordine finito.

dove r' cresce indefinitamente, perchè tale serie è analoga alla (1), essendo ciascun termine infinito rispetto al seguente.

Può invece contenere una serie sempre crescente di questo tipo:

$$(2) \qquad \frac{a_1}{\infty_1} + \frac{a_2}{\infty_1^2} + \cdots + \frac{a_n}{\infty_1^n} + \cdots \qquad \text{per } n = \infty$$

perchè essa ha un segmento limite nel campo dei numeri infiniti d'ordine finito, e quindi rappresenta uno dei miei numeri. Tali considerazioni sono ovvie quando si pensi alla costruzione dei segmenti e del simbolo Z del numero generale compreso fra 0 e 1, imperocchè ottenuto un segmento AB, (rappresentato ad es. da un numero razionale o irrazionale ordinario) ad esso, a cominciare da B aggiungiamo (in senso algebrico) un certo segmento infinitesimo di 1° ordine, o un segmento ottenuto mediante una serie della forma (2), ed otteniamo così un segmento (AB′). Poi aggiungiamo un segmento $\frac{a}{\infty_1^{\infty_1 - r'}}$, dove naturalmente r' è quanto grande si vuole, ma dato, e si potrà poi aggiungere un segmento rappresentato da una serie ad es. della forma

$$\frac{a'}{\infty_1^{\infty_1 - r'}} + \cdots + \frac{a'_n}{\infty_1^{\infty_1 - r' + n}} + \cdots (n = \infty)$$

Ed infatti ho detto espressamente nei *F. G.* « che l'infinitesimo di ordine $\infty_1 - r'$ si riferisce all'elemento (cioè B′) determinato dalle parentesi precedenti ».

Non nego però che dal solo simbolo Z e dalla definizione data poi si possa credere anche che r' cresca indefinitamente; ma ciò è escluso dalla costruzione medesima di cui quel simbolo e quella definizione fanno parte.

Se il simbolo Z si scrive così

$$Z = (A\,A_1)\left[m \pm \frac{m_1}{\infty_1} \pm \cdots \pm \frac{m_r}{\infty_1^r} + \cdots + \frac{m_{\infty_1 - r'}}{\infty_1^{\infty_1 - r'}} + \cdots + \frac{m_{\infty_1 - r' + r_1}}{\infty_1^{\infty_1 - r' + r_1}} + \cdots + \right]$$

r e r_1 possono crescere indefinitamente, r' no. Non nego anche che il simbolo poteva essere scritto meglio ponendo invece di r' un'altra lettera, ad es. s'. È in ogni modo chiaro per la costruzione dei segmenti e quindi dei numeri che essi si estendono indefinitamente da un solo lato. Se si prendono due dei miei numeri nella forma analoghi a quelli del sig Schoenflies, cioè:

$$A = a_0\,\infty_1^{\infty_1} + a_1\,\infty_1^{\infty_1 - 1} + \cdots + a_r^{\infty_1 - r} + \text{ecc.} + a'_m\,\infty_1^m + \cdots + a'_0 + \frac{a''_1}{\infty_1} +$$
$$+ \cdots + \frac{a''_{r_1}}{\infty_1^{r_1}} + \text{ecc.} + \frac{a'''_{r'}}{\infty_1^{\infty_1 - r'}} + \cdots + \frac{a'''_0}{\infty_1^{\infty_1}}$$

$$B = b_0\,\infty_1^{\infty_1} + \cdots + b_s\,\infty_1^{\infty_1 - s} + \text{ecc.} + b'_n\,\infty_1^n + \cdots + b'_0 + \frac{b''_1}{\infty_1} + \cdots + \frac{b''_{s_1}}{\infty_1^{s_1}} +$$
$$+ \text{ecc.} + \frac{b'''_{s'}}{\infty_1^{\infty_1 - s'}} + \cdots + \frac{b'''_0}{\infty_1^{\infty_1}}$$

dove *ecc.* significa che vi è una serie indefinita di termini, la moltiplicazione è possibile, nel senso che A . B è un numero del sistema confrontabile cogli altri. Ad es. essendo $n \geqq r_1$, $m \geqq s_1$, il coefficente c_0 dell'unità 1 è

$$c_0 = \sum_0^{r'} b_i\, a_i''' + \sum_0^{r_1} b_i'\, a_i'' + \sum_0^{s_1} b_i''\, a_i' + \sum_0^{s'} b_i'''\, a_i \,.$$

Da ultimo osservo che l'esempio numerico dei *F. G.* riportato dal sig. Schoenflies, nel quale esprimo il numero $\frac{1}{\infty_1 - m}$ mediante le unità $\frac{1}{\infty_1}$, $\frac{1}{\infty_1^2} \cdots \frac{1}{\infty_1^{\mu}}$ è esatto limitandosi alle unità $\frac{1}{\infty_1}\, \frac{1}{\infty_1^2} \cdots \frac{1}{\infty_1^{n}} \cdots$ cioè al campo dei numeri infinitesimi di ordine finito. La prima parentesi basta a determinare il numero stesso anche considerando le unità infinite d'ordine infinito (¹).

4. Il Klein nella sua recente relazione sul terzo volume della teoria dei gruppi di trasformazioni di Lie, accennando ai miei numeri transfiniti, e quindi al nuovo continuo rettilineo, dichiara di astenersi dal pronunciarsi sulle obiezioni mosse contro tali concetti, ma che però da essi non si sono ottenuti finora « greifbare geometrische Resultate ». Non discuto gli apprezzamenti personali sul valore delle cose mie, tanto più di un matematico il cui nome mi risveglia care memorie; credo però che quando non si avrà più alcun dubbio sulla soluzione da me data alla questione dell'assioma d'Archimede si troveranno anche nella parte geometrica dei *F. G.* dei risultati chiari e determinati (²); e in ogni caso si vedrà che la soluzione della questione che mi sono proposta è già per se stessa un risultato matematico determinato.

A proposito dell'indirizzo del mio libro, Klein aggiunge che egli trova « aeusserst schwer » di seguire il mio « Gedankengang » anche in una sola parte. Non nego che difficoltà vi siano, ma esse dipendono anche dalla natura del problema trattato. Più si discende e più difficili sono le questioni intorno ai fondamenti della scienza, di guisa che le maggiori difficoltà s'incontrano dapprincipio. E nel mio libro sono forse più gravi che in altri, perchè non ho supposto nulla di noto per trattare il problema in tutta la sua generalità. Se io avessi avuto di mira un solo postulato, ad es. quello di Archimede, o se io avessi fatto uso fin dal principio dell'istrumento analitico

(¹) *F. G.* pag. 155 e seg. tr. t. 172.

(²) Ad es. il sistema geometrico del quale fanno parte il sistema Riemanniano (sferico o ellittico) e il sistema Euclideo, ove si passa dall'uno all'altro coi concetti d'infinito e di infinitesimo attuale; e il risultato che in ogni campo infinitesimo attuale intorno ad un punto del sistema Riemanniano del sistema Euclideo e di quello di Lobatschewsky vale il sistema Euclideo. Queste proposizioni furono dimostrate anche analiticamente dal prof. Levi-Civita (l. c.).

con tutte le sue risorse, le mie ricerche sarebbero state più facilmente comprese; ma avrei trattata la questione dei principî della matematica e in particolare della geometria da un punto di vista più ristretto. Pur riconoscendo l'importanza di tali indirizzi e dei risultati con essi ottenuti, quanti postulati ad es. non si ammettono coll'applicare direttamente l'analisi ai primi elementi della geometria? E questi postulati sono essi i più proprî alla natura del problema? Analisti insigni, compreso Klein, insegnano che deve preferirsi per la trattazione dei principî della geometria il metodo sintetico, ma questo metodo per sè e ancora più colle nuove forme assunte dall'intuizione geometrica che urtano vecchie abitudini e radicate convinzioni, è oggidì meno seguito e riesce a molti più difficile del metodo analitico.

Un'altra difficoltà sta nella scomposizione dei postulati nelle loro parti semplici, essendo preferibile, come dice il Klein stesso, un sistema di postulati più semplice di un altro più complicato. Ma tale metodo, quando sia applicato il più possibile ad ogni postulato, ha lo svantaggio di far perdere di vista facilmente i concetti generali che presentano qualche novità. Tuttavia mi lusingo che quando la teoria dei segmenti infiniti e infinitesimi attuali sarà riconosciuta esatta, si riconoscerà pure che essa è svolta nei miei *F. G.* sufficientemente e nel modo che meglio corrisponde alla sua natura geometrica.

Fisica. — *La criptoluminescenza dei metalli.* Nota del Corrispondente A. Ròiti.

§ 1. — Nella mia Nota [1] presentata all'Accademia in agosto 1897, ho riferito delle esperienze che stabiliscono come il potere emissivo dei metalli pei raggi X vada di pari passo col peso atomico. In quelle esperienze un piattello d'alluminio chiudeva il tubo davanti al catodo leggermente convesso, ed era coperto all'interno per metà con un metallo A e per l'altra metà con un metallo B, ed all'esterno era coperto in corrispondenza di B con A ed in corrispondenza di A con B, in maniera che le grossezze dei varî strati da attraversare fossero per tutto uguali. E pure lo schermo criptoscopico, applicato contro tale sistema, s'illuminava di più su quella metà che toccava il metallo di minor peso atomico, e così il metallo di peso atomico maggiore mostrava maggior potere emissivo pei raggi X.

In queste osservazioni la difficoltà maggiore è di distribuire uniformemente i raggi catodici sul piatto anticatodico: ed ho trovato qualche vantaggio sostituendo al tubo allora usato, il palloncino qui rappresentato nella

(1) *Se i raggi X esistano già nel fascio catodico che li produce.* Rendiconti, Vol. VI, pag. 129.